Midtoets Calculus 2

9 maart 2009, 9.00-10.00 uur.

Per opgave zijn maximaal 2 punten te behalen. Totaal: 10 punten.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.

1. Laat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een reeks met reële termen zijn.
   (a) Bewijs: Als de reeks convergent is, dan geldt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
   (b) Geef (zonder bewijs) een voorbeeld van een reeks die niet convergeert, alhoewel de algemene term a_n wel naar 0 gaat voor $n \to \infty$.

2. Bepaal (zonder formeel bewijs) de algemene term in de Taylorrreeks, rondom $x = 1$, van de reële functie
$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

3. Gegeven is de reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n2^n}$$
Voor welke $x \in \mathbb{R}$ is deze reeks absoluut convergent; voor welke x is de reeks convergent; en voor welke x divergeert de reeks.

4. De reeks
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$$
is convergent; de som is s. Bepaal N zodanig dat de partiële som s_N de som s benadert met een fout $\leq 3/32$. Motiveer.

5. De functie f is periodiek met periode 2. Het functievoorschrift luidt:
$$f(x) = -1 \quad \text{voor} \quad -1 < x < 0, \qquad\qquad f(x) = 1 \quad \text{voor} \quad 0 < x < 1$$
en $f(x) = 0$ voor $x = -1, x = 0, x = 1$.
Bereken de Fourierreeks van f.